

Inf-Math-A

25.01.2010

INHALT

Kapitel 11 – Relationen und Ordnungen	2
Definition 11.1 (Relation)	2
Definition 11.2 (Relationseigenschaften)	2
Definition 11.3 (Äquivalenzrelation)	2
Definition 11.4 (Partition).....	3
Definition 11.5 (Äquivalenzklasse)	3
Proposition 11.6 (Äquivalenzrelation).....	3
Satz 11.7 (Äquivalenzrelation \leftrightarrow Partition).....	3
Restklassen	3
Satz 11.8 (Kongruenzrelation)	4

KAPITEL 11 – RELATIONEN UND ORDNUNGEN

DEFINITION 11.1 (RELATION)

Es seien X, Y Mengen. Eine Relation R (über X, Y) ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$. Für $x \in X, y \in Y$ bedeutet $x R y$ gerade $(x, y) \in R$ und man sagt, x und y stehen in Relation R zueinander. Ist $X = Y$, spricht man von der Relation R auf X .

Beispiele:

- Ist $f: A \rightarrow B$ eine Funktion, so ist $R := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ eine Relation, die f beschreibt. Umgekehrt ist z.B. für $A = \mathbb{N} = B$

$$R := \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
eine Relation auf \mathbb{N} , aber keine Funktion, denn die Zuordnung $n \rightarrow n+1$ sowie $n \rightarrow n+2$ ist nicht eindeutig.
- Sei R eine Relation auf $X \times Y$ mit $X = \{x_1, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ sei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & : (x_i, y_j) \in R \\ 0 & : (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

sowie $A := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. A heißt die Adjuzenzmatrix von R .

$$\begin{array}{cccc} & i & j & n \\ & | & | & | \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & & & \end{array}$$

- "=" und " \leq " sind Relationen auf \mathbb{N}

$$"=" = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}, " \leq " = \{(1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), \dots\}.$$

DEFINITION 11.2 (RELATIONSEIGENSCHAFTEN)

Eine Relation R auf X heißt

- reflexiv, falls $x R x$ für alle $x \in X$, d.h. $(x, x) \in R$.
- symmetrisch, falls aus $x R y$ folgt $y R x$, d.h. aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$ für alle $x, y \in X$
- transitiv, falls aus $x R y$ und $y R z$ folgt $x R z$, d.h. $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$.

Graphische Illustration:

Stellen wir $(x, y) \in \mathbb{R}$ als Pfeil $x \longrightarrow y$ dar, so bedeuten:

- reflexiv: $x \longrightarrow x$
- symmetrisch: $x \longrightarrow y$ und $y \longrightarrow x$
- transitiv: $x \longrightarrow y$ und $y \longrightarrow z$ impliziert $x \longrightarrow z$

DEFINITION 11.3 (ÄQUIVALENZRELATION)

Eine Relation auf R heißt Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

DEFINITION 11.4 (PARTITION)

Eine Menge P von Teilmengen einer Menge X nennt man Partition (oder Zerlegung) von X , falls $A \cap B = \emptyset$ für alle $A, B \in P$ und $X = \bigcup_{A \in P} A$.

DEFINITION 11.5 (ÄQUIVALENZKLASSE)

Sei R eine Relation auf X . Für $x \in X$ sei $R[x] := \{y \mid y \in X \text{ und } (x, y) \in R\}$ ($=: [x]_R$) die Äquivalenzklasse von x unter R .

PROPOSITION 11.6 (ÄQUIVALENZRELATION)

Für jede Äquivalenzrelation R auf X gilt

- (i) $R[x] \neq \emptyset$ für alle $x \in X$
- (ii) Für $x, y \in X$ ist entweder $R[x] = R[y]$ oder $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.

Beweis:

- (i) Wegen Reflexivität gilt $(x, x) \in R$, d.h. $x \in R[x]$.
- (ii)
 - a. 1. Fall: $(x, y) \in R$. Wir zeigen $R[x] = R[y]$
 Dazu zeige: $R[x] \subseteq R[y]$ und $R[y] \subseteq R[x]$.
 Zeige $R[x] \subseteq R[y]$: Sei $z \in R[x]$, d.h. $(x, z) \in R$. Nach Voraussetzung ist $(x, y) \in R$, also wegen Reflexivität $(x, y) \in R$, d.h. $(y, x) \in R$, $(x, z) \in R$, mit Transitivität $(y, z) \in R$, d.h. $z \in R[y]$.
 Vertauschen von x und y zeigt auch $R[y] \subseteq R[x]$.
 - b. 2. Fall: $(x, y) \notin R$. Zeigen $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.
Annahme: $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, d.h. es gibt $z \in R[x] \cap R[y]$. Hieraus $(x, z) \in R$ und $(y, z) \in R$, also mit Symmetrie $(z, y) \in R$, mit Transitivität $(x, y) \in R$ zur Voraussetzung. ■

SATZ 11.7 (ÄQUIVALENZRELATION \leftrightarrow PARTITION)

Sei X eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf X induziert eine Partition von X und umgekehrt.

Beweis:

Sei R eine Äquivalenzrelation auf X . Sei $P = \{R[x] \mid x \in X\}$. Mit Proposition 11.6 ist P eine Partition von X . Sei P eine Partition von X . $R := \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind in derselben Partitionsmenge von } P\}$. R ist Äquivalenzrelation.

Wählt man aus einer Äquivalenzklasse $R[x]$ ein ausgezeichnetes Element $x' \in X$, so heißt x' der Repräsentant von $R[x]$. Man kann z.B. $x' = x$ nehmen.

RESTKLASSEN

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für $0 \leq r < m$ bezeichnen wir mit $r + m\mathbb{Z}$ die Menge $r + m\mathbb{Z} := \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: a - km = r\}$.

$r + m\mathbb{Z}$ heißt Restklasse r modulo m . Man schreibt für $a \in r + m\mathbb{Z}$ auch $a \equiv r \pmod{m}$, a kongruent r modulo m .

Es gibt nur m Restklassen $0, 1, \dots, m - 1$. Diese bezeichnet man auch kurz durch $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m - 1}$

SATZ 11.8 (KONGRUENZRELATION)

Die Kongruenzrelation " \sim " auf \mathbb{Z} definieren wir durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists_{0 \leq r < m} : x, y \in r + m\mathbb{Z}$

" \sim " ist eine Relation auf \mathbb{Z} .

" \sim " ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} und die Restklassen $0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \dots, (m - 1) + m\mathbb{Z}$ sind paarweise disjunkt und bilden eine Partition von \mathbb{Z} .

Beweis:

Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gibt es ein r mit $z \in r + m\mathbb{Z}$, also

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{0 \leq r \leq (m-1)} (r + m\mathbb{Z})$$

Paarweise Disjunktheit: $(r + m\mathbb{Z}) \cap (r' + m\mathbb{Z}) = \emptyset$ für $r \neq r'$.

Also bilden die Restklassen eine Partition von \mathbb{Z} und mit Satz 11.7 ist " \sim " eine Äquivalenzrelation. ■

Definition 11.9

Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (lies: \mathbb{Z} modulo $m\mathbb{Z}$) die Menge der Restklassen modulo m .