

# Inf-Math-A

08.02.2010

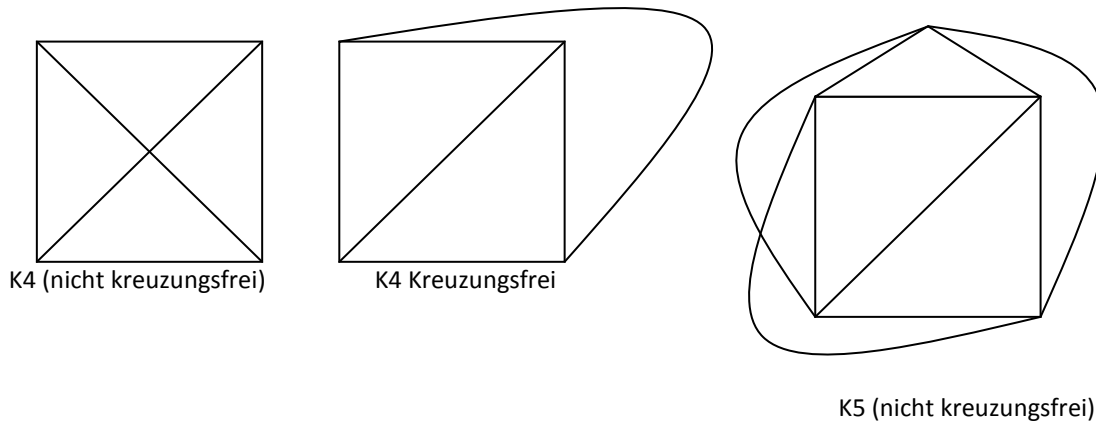
## Graphentheorie

### INHALT

Planare Graphen.....	2
Definition 13.1 (Planar).....	2
Satz 13.2 (Euler'sche Polyederformel).....	3
Lemma 13.3 (Anzeichen für Bäume) .....	3
Beweis Satz 13.2.....	3
Korollar 13.4 (Kantenanzahl von planaren Graphen) .....	3
Korollar 13.5 .....	4

Klausur: 4 einseitig handschriftlich beschriebene DinA4-Seiten sind erlaubt.

PLANARE GRAPHEN



Frage: Hat der  $K_5$  eine kreuzungsfreie Darstellung in der Ebene?

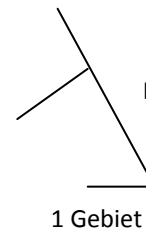
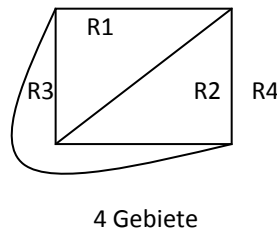
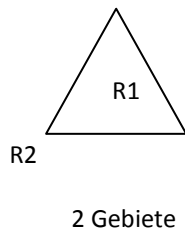
DEFINITION 13.1 (PLANAR)

Ein Graph heißt planar, wenn man ihn so in der Ebene zeichnen kann, dass sich die Kanten nur in den Knoten treffen (kreuzen) (kreuzungsfreie Darstellung). Ein ebener Graph ist ein planarer Graph zusammen mit seiner kreuzungsfreien Darstellung in der Ebene.

Beobachtung:  $K_4$  ist planar.

Problematik bei Def. 13.1: „zeichnen“ und „kreuzen“ bisher nicht definiert. -> Jordan'scher Kurvensatz.

Beispiel:



	$ V $	$ E $	$ R $
$K_3$	3	3	2
$K_4$	4	6	4
$T$	5	4	1

$$\left. \begin{aligned} 3 - 3 + 2 &= 2 \\ 4 - 6 + 4 &= 2 \\ 5 - 4 + 1 &= 2 \end{aligned} \right\} |V| - |E| + |R| = 2$$

wobei R=Menge der Gebiete

Liegt eine planare Darstellung eines Graphen vor, so bezeichnet man als ein Gebiet einen zusammenhängenden Teil, den man dadurch erhält, dass man die Ebene entlang der begrenzenden Kanten zerschneidet.

Die Menge der Gebiete bezeichnen wir mit  $R$ .

**SATZ 13.2 (EULER'SCHE POLYEDERFORMEL)**

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender ebener Graph mit Gebietsmenge  $R$ . Dann gilt:  $|V| - |E| + |R| = 2$

Die Zahl 2 nennt man Invariante (invariante) planarer Graphen.

Satz 13.2 ist der Grundstein für Topologie

**LEMMA 13.3 (ANZEICHEN FÜR BÄUME)**

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit  $|E| = |V| - 1$ . Dann ist  $G$  ein Baum.

**BEWEIS SATZ 13.2**

Induktion über  $|E|$

Da  $G$  zusammenhängend ist, gilt nach Kap. 12:  $|E| \geq |V| - 1$

**Induktionsanfang:**

$|E| = |V| - 1 \xrightarrow{\text{Lemma 13.3}} G \text{ ist ein Baum.}$  Somit nur ein Gebiet.

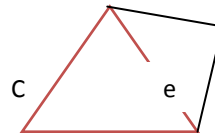
$$|V| - |E| + |R| = |V| - (|V| - 1) + 1 = 2$$

**Induktionsschluss:**

$|E| - 1 \rightarrow |E|, |E| > |V| - 1. G \text{ ist kein Baum.}$

$G$  enthält daher einen Kreis  $C$ . Betrachte eine beliebige Kante  $e$  aus  $C$ . Entferne  $e$  aus  $E$ .  $e$  begrenzt genau 2 Gebiete, die nach Entfernung von  $e$  verschmelzen.

Sei  $G \setminus e$  der so entstehende Graph.



Weil  $e$  aus einem Kreis stammt, bleibt  $G \setminus e$  zusammenhängend.

$$\xrightarrow{\text{IV auf } G \setminus e} |V| - (|E| - 1) + |R| - 1 = 2 \Leftrightarrow |V| - |E| + |R| = 2 \blacksquare$$

**KOROLLAR 13.4 (KANTENANZAHL VON PLANAREN GRAPHEN)**

Für jeden planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mindestens 3 Knoten gilt  $|E| \leq 3|V| - 6$

**Beweis:** Doppeltes Zählen:

Jedes Gebiet wird von mindestens 3 Kanten begrenzt und jede Kante begrenzt höchstens zwei Gebiete. Also

$$3|R| \leq 2|E| \xrightarrow{\text{Eulersche Poly-Formel Satz 13.2}} |E| = |V| - 2 + |R| \leq |V| - 2 + \frac{2}{3}|E|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}|E| \leq |V| - 2$$

$$\Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6 \blacksquare$$

## KOROLLAR 13.5

$K_5$  ist nicht planar

**Beweis durch Widerspruch**

Annahme:  $R_5$  ist planar.

$$\xrightarrow[\text{Korollar 13.4}]{} 10 \leq 3|V| - 6 = 3 * 5 - 6 = 9$$

$\Rightarrow 10 \leq 9$ , also ist  $K_5$  nicht planar.

Es gilt der 4-Farben-Satz: G planar, dann  $X(G) \leq 4$