

Inf-Math-A

18.01.2010

INHALT

10 Elementare Kombinatorik	2
Die Fakultät und Permutation	2
Satz 10.1 (Fakultät)	2
Eine Anwendung: Travelling-Salesman-Problem (TSP)	2
Satz 10.2 (Beschränkungen von $n!$)	3
Proposition 10.3 (Der Binomialkoeffizient)	3
Satz 10.4 (Beschränkung von n über k)	3
Satz 10.5	3
Satz 10.6	4
Zusammenfassung	4

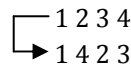
10 ELEMENTARE KOMBINATORIK

DIE FAKULTÄT UND PERMUTATION

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir $n! = \prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * \dots * n$.
 (Lies: n-Fakultät)

Eine Permutation σ der ersten n natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ ist eine bijektive Funktion
 $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 $i \rightarrow \sigma(i), i \in \{1, \dots, n\}$

z.B.:



Die Menge der Permutationen heißt S_n

SATZ 10.1 (FAKULTÄT)

$$|S_n| = n!$$

Beweis durch Induktion nach n

Induktionsanfang ($n = 1$): $1! = 1 = |S_1|$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Sei S_k^* die Menge der Permutationen aus S_{n+1} , in denen k als erstes Element vorkommt, $k = 1, \dots, n + 1$

$$\begin{array}{c} (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n) \\ k \ \dots \ \dots \ \dots, \ \sigma(1) = k \end{array}$$

Wir haben $S_k^* \cap S_{k'}^* = \emptyset \forall k \neq k'$ und $S_{n+1} = S_1^* \cup \dots \cup S_{n+1}^*$.

$$\Leftrightarrow |S_{n+1}| = |S_1^*| + \dots + |S_{n+1}^*|.$$

Jede Permutation aus S_k^* hat die Gestalt $(k, \sigma(2), \dots, \sigma(n + 1))$, also $|S_k^*| = |S_n| \stackrel{IV}{=} n!$
Permutation der 2,3,...,n+1

$$\Leftrightarrow |S_{n+1}| = n! (n + 1) = n + 1!$$

EINE ANWENDUNG: TRAVELLING-SALESMAN-PROBLEM (TSP).



Ein Handelsreisender möchte n Städte besuchen, aber jede Stadt genau einmal und zum Ausgangspunkt zurückkehren. Gesucht ist die kürzeste Rundreisroute (Tour).

Er hat nun n Möglichkeiten, die erste Stadt zu wählen, (n-1) Möglichkeiten für die zweite Stadt, etc. (wie beim Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen)

SATZ 10.2 (BESCHRÄNKUNGEN VON $n!$)

Für alle $n \geq 4$ gilt $2^n \leq n! \leq 2^{n \cdot \log_2(n)}$

Bemerkung: 2^{100}

Beweis: Untere Schranke: Übungen

Obere Schranke: Induktion

Induktionsanfang: $n = 4$: $4! = 24 < 64 = 2^{4 \cdot \log_2(4)}$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$: Für $n \geq 4$ gilt $n + 1 \leq 2n = 2^{\log_2(2n)}$. (1)

Somit $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1) \leq 2^{n \cdot \log_2(n)} \cdot (n + 1) = 2^{n \cdot \log_2(n)} * 2^{\log_2(n+1)} = 2^{n \cdot \log_2(n) + \log_2(n+1)} \leq 2^{n \cdot \log_2(n+1) + \log_2(n+1)} = 2^{(n+1) \cdot \log_2(n+1)}$

PROPOSITION 10.3 (DER BINOMIALKOEFFIZIENT)

Für $k, n \in \mathbb{N}$ sei $\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$. $\binom{n}{k}$ ist der k -te Binomialkoeffizient.

- (i) $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
- (ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ für $k \leq n$

Beweis:

- (i) Für $j = n + 1$ ist $\frac{n-j+1}{j} = 0$, also ist das Produkt $\prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = 0$
- (ii) $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ ■

Spezielle Werte

$$\binom{n}{0} := 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

SATZ 10.4 (BESCHRÄNKUNG VON N ÜBER K)

Für $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq 2^{-k} * n^k$, d.h. für festes k wächst $\binom{n}{k}$ nicht schneller als n^k

Beweis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \stackrel{\text{Satz 10.2}}{\leq} \frac{n^k}{2^k} = 2^{-k} n^k \blacksquare$$

SATZ 10.5

Eine endliche Menge mit n Elementen besitzt $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ k -Tupel, $k \leq n$.

Beweis durch Induktion:

Sei $t_k(n)$ = Anzahl der k -Tupel aus einer Menge X mit $|X| = n$ und sei $f_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Induktionsanfang: $k = 1$. Dann ist die Anzahl der Tupel: $t_1(n) = n = f_1(n)$

Induktionsschritt: $k \rightarrow k + 1$. Aus einem k -Tupel können wir ein $(k+1)$ -Tupel erzeugen, indem wir aus den verbliebenen $n-k$ Elementen von X ein Element aussuchen und daranhängen.

$$(a_1, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}).$$

Nun ist aber jedes $(k+1)$ -Tupel von dieser Form.

$$\Leftrightarrow t_{k+1}(n) = (n-k) * t_k(n) \stackrel{IV}{=} (n-k) * f_k(n) = (n-k) * (n-k+1) * \dots * (n-1) * n = f_{k+1}(n) \blacksquare$$

SATZ 10.6

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$

Beweis:

Sei X eine Menge mit $|X| = n$. Sei m_k die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von X . Nach Satz 10.5 ist die Anzahl der k -Tupel $n(n-1) * \dots * (n-k+1)$.

Aus einer k -elementigen Teilmenge können wir $k!$ k -Tupel erzeugen.

Jedes k -Tupel erhält man in dieser Art aus einer k -elementigen Teilmenge, somit $m_k * k! = n(n-1) * \dots *$

$$(n-k+1) \Rightarrow m_k = \frac{n(n-1) * \dots * (n-k+1)}{k!} \stackrel{Def.}{=} \binom{n}{k} \blacksquare$$

ZUSAMMENFASSUNG

$n!$ = Anzahl der Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der Teilmengen einer n -elementigen Menge

Nächste Vorlesung: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$