Inf-Math-A

20.01.2010

INHALT

ELEMENTARE KOMBINATORIK

LEMMA 10.7

Für $1 \leq k \leq n$ $gilt$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Beweis:

$$k = n: \binom{n}{n} = 1 = \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0}$$

$$1 \leq k \leq n-1: \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)! + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \blacksquare$$

SATZ 10.8 (BINOMISCHER LEHRSATZ)

$Seien\ x, y \in \mathbb{R} und\ n \in \mathbb{N}.$

$$Dann\ gilt\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Dieser Lehrsatz ist eine Verallgemeinerung der Formel $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

KOROLLAR 10.9

(i) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{Satz\ 10.6}{=} Anzahl\ der\ Teilmengen\ einer\ n-elementigen\ Menge.$

(ii) $0 = (1-1)^n = \sum^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

BEWEIS SATZ 10.8

Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \underbrace{\binom{0}{0}}_{=1} x^0 y^0.$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) \underset{IV}{=} \left(\sum_{n}^{k=0} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right)(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+k1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^k + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \blacksquare$$

Hieraus bekommt man:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^{2y}+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ Pascal'sches\ Dreieck \end{array}$$

Jede Zahl im Inneren des Pascal'schen Dreiecks ist die Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen. Warum? Lemma 10.7

DIE HARMONISCHE REIHE

DEFINITION 10.10

$$Für\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ sei\ H_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\ die\ n-te\ Harmonische\ Zahl. Und\ H_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\ ist\ die\ harmonische\ Reihe.$$

SATZ 10.11

$$\frac{1}{2} * \lfloor \log_2(n) \rfloor \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \log_2(n)$$

ABSCHÄTZUNG NACH OBEN (OBERE SCHRANKE)

Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} = 1 \leq 1 + \underbrace{\log_2(1)}_{=0}$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \underset{IV}{\leq} 1 + \log_2(n) + \frac{1}{n+1} \overset{!}{\leq} 1 + \log_2(n+1) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \log_2(n+1) - \log_2(n) = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (Ungl. 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ (Ungl. 3)$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \geq 1 + n * \frac{1}{n}}_{Bernoulli-Ungleichung} = 2. \, Damit \ gilt \ (3) und \ somit \ auch \ (1)$$

ABSCHÄTZUNG NACH UNTEN (UNTERE SCHRANKE)

$$Setze \ k \coloneqq \lfloor \log_2(n) \rfloor und \ s_j \coloneqq \sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{l}, 1 \leq j \leq k$$

$$s_j \geq \frac{1}{2^j + 1} * 2^j = \frac{2^j}{1 + 2^j} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{s_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{s_2} + \cdots + \sum_{l=2^k+1}^{2} \frac{1}{l} = \sum_{j=0}^{k} s_j \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 1 \geq \frac{1}{2} * k = \frac{1}{2} \lfloor \log_2(n) \rfloor \blacksquare$$