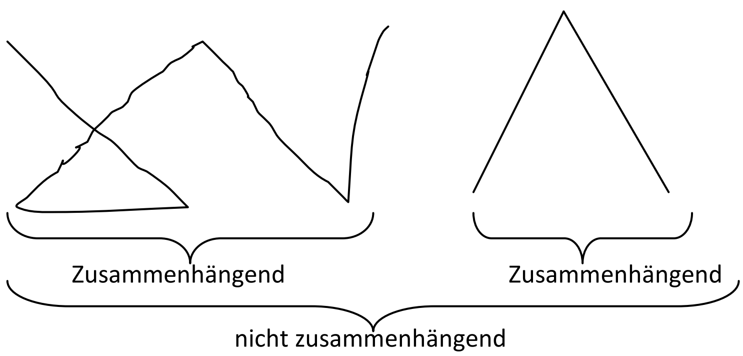
Inf-Math-A

03.02.2010

INHALT

ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN

$$G = (V, E)$$



SATZ 12.4 (ZUSAMMENHÄNGEND)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n, |E| = m$. Dann gilt

(i) $c(G) \geq n - m$
(ii) G zusammenhängend, dann $m \geq n - 1$

Beweis:

(i) Induktion nach m.
<u>IA:</u> $m = 0.\ c(G) = n = n - 0.$
<u>IS:</u> $m \to m + 1$. Sei $G = (V, E)$ mit m+1 Kanten. Sei $e \in E$ eine beliebige Kante. Betrachte $G' = (V, E \setminus \{e\})$.
G' hat m Kanten, also mit IV: $c(G') \geq n - m$. Liegt e in einer Zusammenhangskomponenten und nach Wegnahme von e entsteht keine neue Zusammenhangskomponente, so ist $c(G') = c(G) \geq n - m$. Andernfalls gilt aber $c(G') \geq c(G)$. Weil eine weitere Zusammenhangskomponente dazukommt, gilt $c(G') = c(G) + 1 \geq n - m$.
=> $c(G) \geq n - m - 1 = n - (m + 1)$

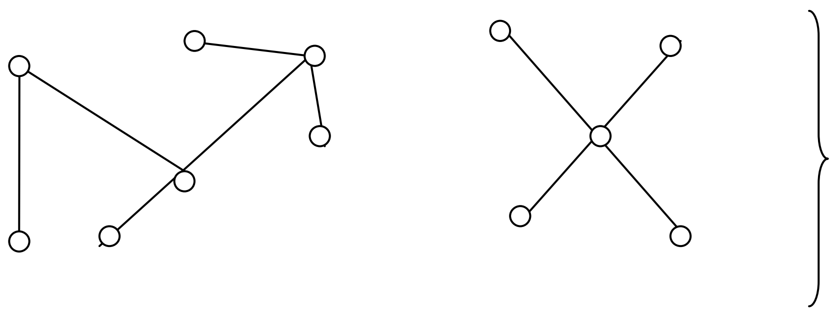
(ii) Wegen (i): $m \geq n - c(G) = n - 1$ ■

SPEZIELLE GRAPHEN

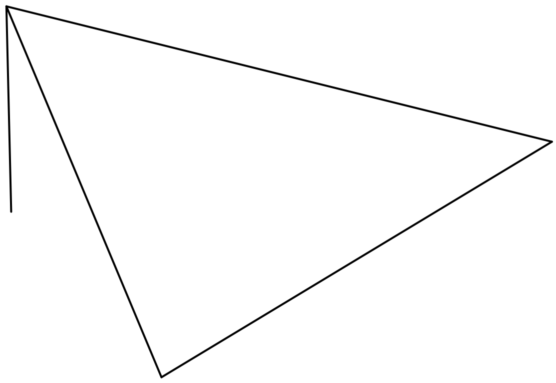
DEFINITION 12.5 (BAUM)

Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph.
Ein Wald ist ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.
Ein Blatt ist ein Knoten in einem Baum mit Grad 1.

<u>Beispiele:</u>



Wald.



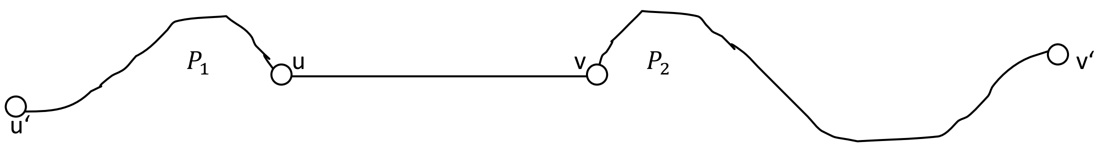
Kein Baum.

LEMMA 12.6 (MINDESTANZAHL VON BLÄTTERN)

Jeder Baum mit mindestens 2 Knoten besitzt mindestens 2 Blätter.

Beweis:

Wir wählen eine Kante $e = (u, v)$ (existiert, weil $|V| \geq 2$ $(G = (V, E)$ sei der betrachtete Graph)).
Laufe nun von u über einen PfadP_1, der e nicht enthält zu einem Knotenu', bis es nicht mehr weitergeht.
Das gleiche Verfahren ausgehend von v gibt uns einen Pfad P_2 mit Endknoten$v\,'$.



Weil G ein Baum ist, gilt$u' \neq v'$, sonst hätten wir einen Kreis in G!

SATZ 12.7 (VERHÄLTNIS VON KANTEN UND KNOTEN IN BÄUMEN)

Für einen Baum $T = (V, E)$ mit$|V| \geq 2, |V| = n, |E| = m$, gilt $m = n - 1$^

Beweis:

<u>Induktion über n</u>

<u>IA:</u> $n = 2$. G besteht nur aus einer Kante$e = \{u, v\}$, mithin sind u und v Blätter.

<u>IS:</u> $n \to n + 1$. Sei $T = (V, E)$ mit$|V| = n + 1$, Baum
Nach Lemma 12.6 besitzt T ein Blatt, sagen wir$b \in V$.
$T' \coloneqq (V \setminus \{b\}, E \setminus \{e\})$, wobei e in b inzident ist, ist ein Baum mit n Knoten.

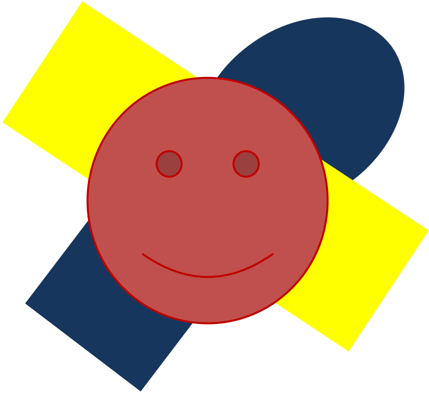
$$\overset{IV}{\Rightarrow} |E \setminus \{e\}| = |V \setminus \{b\}| - 1 \Leftrightarrow |E| - 1 = n - 1 \Leftrightarrow |E| = n - 1 + 1 = (n + 1) - 1 \blacksquare$$

Für Graph $G = (V, E)$ ist für $v \in V, G \setminus v$ der Graph $G \setminus v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{in\ v\ inzidente\ Kanten\})$ sowie für$e \in E, G \setminus e \coloneqq (V, E \setminus \{e\})$.

FÄRBUNGEN VON GRAPHEN

VIER FARBEN PROBLEM

Wir haben eine Landkarte. Aufgabe: Färbe die Länder mit verschiedenen Farben, aber möglichst wenig Farben, so dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



3 Farben!

Vier-Farben-Vermutung: Jede Landkarte lässt sich mit höchstens 4 Farben färben.

Modellierung als Graphen: Jedes Land ist ein Knoten und zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Länder benachbart sind.

DEFINITION 12.8 (FÄRBUNG)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Färbung (der Knoten von G) mit k Farben ist eine Funktion $f: V \to \{1, \dots, k\}$, so dass für jedes $u, v \in V$ mit $\{u, v,\} \in E$ gilt: $f(u) \neq f(v)$.

Die chromatische Zahl $\mathrm{X}(G)$ von G ist das kleinste k, so dass G mit k Farben färbbar ist.